Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 WP001B
8 juli 2011, 14.00–17.00

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Beschouw de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen. Bij de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definiëren we een rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ van geschaalde gemiddeldes door middel van $b_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} a_k$.

   (a) Wanneer heet de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent?

   (b) Bewijs de volgende uitspraak: Als de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is, dan is de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ van geschaalde gemiddeldes convergent met dezelfde limiet.

   (c) Geldt de omkering van de uitspraak in (b)? Zo ja, geef een bewijs. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

2. Veronderstel $X \subset \mathbb{R}$ en $f\colon X \to \mathbb{R}$ een functie.

   (a) Wanneer heet f uniform continu?

   (b) Twee rijen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen heten equivalent als $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

      (i) $f\colon X \to \mathbb{R}$ is uniform continu;

      (ii) Voor elk tweetal equivalente rijen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ met $x_n \in X$ en $y_n \in X$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $\big(f(x_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ en $\big(f(y_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ equivalente rijen zijn.

   (c) Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Veronderstel dat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie is en dat f differentieerbaar is voor elke $x \in (a,b)$. Veronderstel bovendien dat er een $M \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $|f'(x)| \le M$ voor alle $x \in (a,b)$. Bewijs dat f uniform continu is.

3. (a) Formuleer de stelling van Heine-Borel.

   (b) Bewijs de stelling van Heine-Borel. (U mag gebruik maken van de Stelling van Bolzano-Weierstrass, die u niet hoeft te bewijzen.)

ZOZ

4. Zij $a < b$ reële getallen, en $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie.

   (a) Wanneer heet $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integreerbaar met betrekking tot α? U mag zonder toelichting gebruiken maken van de α-lengte $\alpha[I]$ van een interval I.

   (b) Veronderstel bovendien dat α differentieerbaar is, en dat de afgeleide $\alpha'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is. Laat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een stuksgewijs constante functie zijn. Bewijs dat $f\alpha'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is en dat $\int_{[a,b]} f\,d\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$.

   (c) Veronderstel dat α dezelfde eigenschappen heeft als in (b). Veronderstel nu dat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integreerbaar is met betrekking tot α. Bewijs dat $f\alpha'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is en dat $\int_{[a,b]} f\,d\alpha = \int_{[a,b]} f\alpha'$.

5. Beschouw de Riemann-integreerbare functie $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ en veronderstel dat f differentieerbaar is in 0. Veronderstel dat $0 < \delta < 1$ en definieer $f_\delta\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ door $f_\delta(x) = f(\delta x)$.

   (a) Bewijs dat $f_\delta\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is voor vaste $\delta \in (0,1)$.

   (b) Bewijs dat voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat
   $$|f(\delta x) - (f(0) + f'(0)\delta x)| \le \varepsilon\delta|x|, \qquad \forall x \in [-1,1].$$

   (c) Bewijs dat voor iedere $\varepsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat
   $$|f'(0)\delta - \frac{3}{2}\int_{[-1,1]} x\, f_\delta| \le \varepsilon\delta$$
   waarbij x de functie $x \mapsto x$ betekent. (*Hint.* Vermenigvuldig het resultaat uit (b) met een geschikte functie, en integreer de ontstane ongelijkheid.)

   (d) Concludeer dat $f'(0) = \lim_{\delta\to 0, \delta>0} \frac{3}{2\delta}\int_{[-1,1]} x f_\delta$.

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	7	10	8	10	10	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $t = 0.9T + 0.1P$, waarbij P uw cijfer voor de presentatie is. In het uiteindelijke eindcijfer worden de resultaten van het huiswerk en/of tussentoets verwerkt op de wijze zoals beschreven in de studiewijzer. De resultaten voor het huiswerk en de tussentoets kunnen alleen in uw voordeel werken.

Summiere uitwerkingen en hints

Opgave 1

(a) Definition 6.1.5

(b) Veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dan weten we

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |a_n - L| \leq \varepsilon$$

en we willen bewijzen dat

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |b_n - L| \leq \varepsilon$$

Merk op dat

$$b_n - L = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} (a_k - L)$$

dus kies $\varepsilon > 0$ willekeurig en daarbij $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $|a_n - L| \leq \varepsilon$ voor alle $n \geq N$. Dan geldt voor willekeurige $n \geq N$ dat

$$|b_n - L| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} |a_k - L| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varepsilon = \varepsilon$$

omdat dan ook $k \geq N$. Dus $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

(c) Het omgekeerde geldt niet. Neem bijvoorbeeld de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeven door $a_n = (-1)^n$, dan is deze rij niet convergent (bv door op te merken dat $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \neq -1 = \liminf_{n\to\infty} a_n$ (en Prop. 6.4.12(f)). Daarentegen is

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} (-1)^k = \begin{cases} 0, & n \text{ oneven} \\ \frac{1}{n+1} & n \text{ even} \end{cases}$$

Dan geldt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Opgave 2

(a) Definition 9.9.2

(b) Proposition 9.9.8 Proposition 9.6.7

(c) Kies $x < y$ met $x, y \in [a, b]$, dan voldoet de beperking $f|_{[x,y]} \colon [x, y] \to \mathbb{R}$ aan de Middelwaardestelling, en dus volgt voor zekere $c \in (x, y)$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c).$$

Dan volgt $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ voor alle $x, y \in [a, b]$ (vgl Exercise 10.2.6). Kies nu voor $\varepsilon > 0$ willekeurig, $\delta = \varepsilon/M$ (mits $M > 0$ anders δ willekeurig, bv 1) om te zien dat f uniform continu is.

Opgave 3

(a) Theorem 9.1.24

(b) Theorem 9.1.24

Opgave 4

(a) §11.8

(b) Theorem 11.10.2.

(c) Corollary 11.10.3

Opgave 5

(a) Merk op dat δ een constante is. Omdat f Riemann-integreerbaar is op $[-1,1]$, is f ook Riemann-integreerbaar op $[-\delta,\delta]$ (Theorem 11.4.1(h) herhaald toepassen). Dus voor elke willekeurige $\varepsilon > 0$ bestaan er stuksgewijs constante functies $g, h\colon [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$ zodanig dat $g \le f \le h$

$$\int_{[-\delta,\delta]} g - \varepsilon \le \int_{[-\delta,\delta]} f \le \int_{[-\delta,\delta]} h + \varepsilon$$

Een direkte berekening geeft dat voor stuksgewijs constante functie g voor een partitie P van $[-\delta,\delta]$ geldt dat g_δ stuksgewijs constant is voor de partitie P' van $[-1,1]$, waarbij $J = [(c,d)] \in P$ dan en slechts dan als $\delta^{-1}J = [(c/\delta, d/\delta)] \in P'$

$$\frac{1}{\delta}\int_{[-1,1]} g_\delta = \frac{1}{\delta}\sum_{J\in P} g_\delta|_J\,|J| = \sum_{\delta^{-1}J\in P'} g|_{\delta^{-1}J}|\delta^{-1}J| = \int_{[-\delta,\delta]} g$$

Na schaling vinden we $g_\delta \le f_\delta \le h_\delta$, zodat

$$0 \le \overline{\int}_{[-1,1]} f_\delta - \underline{\int}_{[-1,1]} f_\delta \le \int_{[-1,1]} g_\delta - \int_{[-1,1]} h_\delta = \delta\left(\int_{[-\delta,\delta]} g - \int_{[-\delta,\delta]} h\right) \le 2\delta\varepsilon$$

dus f_δ is Riemann-integreerbaar over $[-1,1]$.

Alternatief: Pas Corollary 11.10.7 toe met $\phi\colon [-1,1] \to [-\delta,\delta]$, $\phi(x) = \delta x$. Dan is ϕ monotoon stijgend, differentieerbaar, en ϕ' is Riemann-integreerbaar (want $\phi'(x) = \delta$). Bovendien is $f\colon [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar, want de restrictie van een Riemann-integreerbare functie (Theorem 11.4.1(h)). Dus dan is $(f \circ \phi)\phi'$ Riemann-integreerbaar, maar deze functie is δf_δ. Omdat delen door δ dan ook Riemann-integreerbaarheid behoudt, volgt dat f_δ Riemann-integreerbaar is op $[-1,1]$.

(b) Omdat f differentieerbaar is in 0 volgt uit de Newton approximatie (Proposition 10.1.7) dat

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0\colon \quad |\xi| \le \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(\xi) - (f(0) + f'(0)\xi| \le \varepsilon|\xi|$$

Vervang $\xi = \delta x$ met $x \in [-1,1]$.

(c) Vermenigvuldig de ongelijkheid

$$|f(\delta x) - (f(0) + f'(0)\delta x)| \leq \varepsilon\delta|x|$$

met $|x|$ en dat geeft

$$|xf(\delta x) - (f(0)x + f'(0)\delta x^2)| \leq \varepsilon\delta x^2$$

en dus

$$-\varepsilon\delta x^2 \leq xf(\delta x) - (f(0)x + f'(0)\delta x^2) \leq \varepsilon\delta x^2.$$

Integreer deze ongelijkheid over $[-1, 1]$ en gebruik dat $\int_{[-1,1]} x^2 = \frac{2}{3}$ en $\int_{[-1,1]} xf(0) = 0$, dus

$$-\varepsilon\delta\frac{2}{3} \leq \int_{[-1,1]} xf_\delta - f'(0)\delta\frac{2}{3} \leq \varepsilon\delta\frac{2}{3}.$$

Deel door $\frac{2}{3}$ voor het resultaat.

(d) Deel door δ hetgeen

$$|\frac{3}{2\delta}\int_{[-1,1]} xf_\delta - f'(0)| \leq \varepsilon$$

en aangezien $\varepsilon > 0$ willekeurig is, volgt

$$f'(0) = \lim_{\delta\to 0, \delta>0} \frac{3}{2\delta}\int_{[-1,1]} xf_\delta$$