Radboud Universiteit Nijmegen

Tussentoets Analyse 1 WP001B
13 april 2010, 10:45–12.30

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Veronderstel dat X en Y eindige verzamelingen zijn. Bewijs dat
$$\#(X) + \#(Y) \geq \#(X \cup Y).$$

2. (a) Formuleer het aftelbare keuzeaxioma.

   (b) Gegeven een niet-lege van boven begrensde verzameling $E \subset \mathbb{R}$. Laat zien dat er een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ bestaat zodanig dat
   - $a_n \in E$ voor alle $n \in \mathbb{N}$;
   - $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(E)$.

3. Gegeven een rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen.

   (a) Wat is de definitie van $\limsup_{n\to\infty} a_n$?

   (b) Veronderstel dat $L = \limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Laat zien dat L een limietpunt is van de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (c) Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass.

4. (a) Gegeven een absoluut convergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, en een willekeurige bijectie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Bewijs dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ absoluut convergent is. (NB U hoeft *niet* te bewijzen dat beide reeksen dezelfde waarden aannemen!)

   (b) Gegeven een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zodanig dat voor elke bijectie $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ convergent is. Bewijs dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absoluut* convergent is.

Normering						
Opgave	1	2	3	4	Gratis	Totaal
Punten	6	8	10	12	4	40

Het onafgeronde cijfer voor de tussentoets S is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 4.

Summiere uitwerkingen en hints

Opgave 1 Proposition 3.6.14(ii) (p.81)

Opgave 2

(a) Axiom 8.1 (p.229, 230)

(b) Lemma 8.4.5 (p.230)

Opgave 3

(a) Definition 6.4.6 (p.162)

(b) Proposition 6.4.12(e) (p.165)

(c) Theorem 6.6.8 (p.174)

Opgave 4

(a) Proposition 7.4.3 (eerste deel: toepassen van Proposition 7.4.1) (p.202)

(b) Zij $N = \{n \in \mathbb{N} \colon a_n \geq 0\}$, $M = \{n \in \mathbb{N} \colon a_n < 0\}$. Dan is $N \cup M = \mathbb{N}$.

Geval dat N of M eindig is. Stel M is eindig, $\#(M) = m$, kies dan de bijectie waarbij de eerste m elementen van $\mathbb{N}$ op M worden afgebeeld en vul dit aan met een bijectie op N. Dan is

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)} = \sum_{n \in M} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_{f(n)}$$

convergent. Omdat de eerste term eindig is, volgt dat $\sum_{n=m}^{\infty} a_{f(n)}$ convergent is. Omdat deze alleen positieve termen heeft, is deze reeks ook absoluut convergent, en dus is ook

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{f(n)}| = -\sum_{n \in M} a_n + \sum_{n=m}^{\infty} a_{f(n)}$$

convergent. Daarmee is ook $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ convergent. Als N eindig is, ga dan over op de reeks met termen $-a_n$.

Geval dat N en M oneindig zijn. Nu hebben N en M dezelfde cardinaliteit als $\mathbb{N}$. Kies de unieke stijgende bijecties $g \colon \mathbb{N} \to N$ en $h \colon \mathbb{N} \to M$ en stel $p_i = a_{g(i)}$ en $q_i = a_{h(i)}$ voor $i \in \mathbb{N}$, dan $p_i \geq 0$ en $q_i < 0$. Omdat de p_i's en de q_i's hetzelfde teken hebben, is convergentie van $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$, respectievelijk $\sum_{i=0}^{\infty} q_i$, gelijk aan absolute convergentie van de reeks. Als de reeksen $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ en $\sum_{i=0}^{\infty} q_i$ convergent, en dus absoluut convergent, zijn, dan is ook

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i + \sum_{i=0}^{\infty} q_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

absoluut convergent, en zelfs

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{i=0}^{\infty} p_i - \sum_{i=0}^{\infty} q_i$$

Veronderstel nu dat minstens één van de reeksen $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i$ divergent is. We zullen laten zien dat de reeks dan niet voldoet aan de aanname. Laten we aannemen dat $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$ divergent is, dan geldt voor elke $P \in \mathbb{N}$ dat de reeks $\sum_{i=P}^{\infty} p_i$ divergeert. Omdat het een reeks met positieve termen is, is de rij van partiële sommens stijgend, en dus betekent divergentie dat de rij van partiële sommen onbegrensd is. Dus bestaat er m_1 met

$$\sum_{i=0}^{m_1} p_i > 1$$

en vervolgens bestaat er m_2 met

$$\sum_{i=0}^{m_1} p_i + q_1 + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} p_i > 2$$

en itererend bestaat er voor iedere $N \in \mathbb{N}$ een $m_N \in \mathbb{N}$ met

$$\sum_{i=0}^{m_1} p_i + q_1 + \sum_{i=m_1+1}^{m_2} p_i + q_2 + \cdots + q_{N-1} + \sum_{i=m_{N-1}+1}^{m_N} p_i > N$$

en dit geeft een bijectie f waarvoor $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ divergeert.

Kortom, als $\sum_{i=0}^{\infty} p_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} q_i$ convergeren, dan is $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absoluut convergent. En als minstens één van deze reeksen divergeert, dan is er een tegenspraak met het gegeven. Dus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is absoluut convergent.