Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 WP001B
6 juli 2010, 14.00–17.00

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Beschouw de reeks $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, en de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$.

   (a) Wanneer heet de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent?

   (b) Laat zien dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is convergent dan en slechts dan als $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ zodanig dat $\forall\ k, l \geq N$ geldt $|\sum_{n=k}^{l} a_n| < \varepsilon$.

   (c) Bewijs de volgende uitspraak. Veronderstel dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een absoluut convergente reeks en dat de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ begrensd is, dan is de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absoluut convergent.

   (d) Is de uitspraak in (c) ook waar als we *absoluut* verwijderen? Ofwel geldt dat een convergente reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en een begrensde rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ impliceren dat de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ convergent is?

2. Veronderstel $a < b$ en dat $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is.

   (a) Bewijs dat f begrensd is.

   (b) Bewijs dat de verzameling $f([a, b]) = \{f(x)\colon x \in [a, b]\}$ gesloten is. (*Hint.* Laat zien dat elk punt dat kleeft aan $f([a, b])$ al bevat is in $f([a, b])$ door de stelling van Heine-Borel te gebruiken.)

   (c) Formuleer het maximumprincipe voor continue functies.

   (d) Geef een bewijs voor uw antwoord bij (c).

ZOZ

3. De Middelwaardestelling kan worden gegeneraliseerd naar het volgende resultaat.

   Stelling Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$. Veronderstel dat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue functies zijn, die differentieerbaar zijn op het open interval (a,b). Veronderstel bovendien dat $g(a) \neq g(b)$ en dat $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in (a,b)$. Dan bestaat er een punt $c \in (a,b)$ met
   $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   (a) Bewijs deze stelling. (*Hint.* Pas de stelling van Rolle –geen bewijs gevraagd!– toe op een geschikte functie.)

   (b) Geef aan hoe de Middelwaardestelling kan worden afgeleid uit deze stelling.

4. (a) Wanneer heet $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar?

   (b) Bewijs de volgende uitspraak: als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ en $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar zijn, dan is ook de som $f + g$ Riemann-integreerbaar.

   (c) Formuleer het eerste deel van de Hoofdstelling van de integraalrekening (First Fundamental Theorem of Calculus).

   (d) Bewijs de stelling uit (c).

5. Gegeven een (niet noodzakelijk strikt) monotoon stijgende continue surjectieve functie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ met $f(0) = 0$. Definieer $g\colon [0,1] \to [0,1]$ door
   $$g(y) = \sup E_y, \qquad E_y = \{x \in [0,1] \mid f(x) \leq y\}.$$
   Dan is $E_y \neq \emptyset$ want $0 \in E_y$ en E_y is van boven begrensd door 1, zodat $g\colon [0,1] \to [0,1]$.

   (a) Bewijs dat g monotoon stijgend is.

   (b) Bewijs dat $g(f(x)) \geq x$ voor alle $x \in [0,1]$.

   (c) Bewijs dat $f(g(y)) = y$ voor alle $y \in [0,1]$

   (d) Geef een voorbeeld waarbij de ongelijkheid in (b) strikt is voor zekere $x \in [0,1]$. Dus g is wel een rechterinverse voor f (ten opzichte van compositie) maar niet een linkerinverse.

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	10	10	5	10	10	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $t = 0.9T + 0.1P$, waarbij P uw cijfer voor de presentatie is. In het uiteindelijke eindcijfer worden de resultaten van het huiswerk en/of tussentoets verwerkt op de wijze zoals beschreven in de studiewijzer. De resultaten voor het huiswerk en de tussentoets kunnen alleen in uw voordeel werken.