Radboud Universiteit Nijmegen

Proeftentamen Analyse 1 WP001B
3 uurs tentamen

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Beschouw de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ van reële getallen.
   (a) Geef de definitie van $\limsup_{n\to\infty} a_n$ en $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
   (b) Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ dan en slechts dan als $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = L$.
   (c) Bewijs dat $\mathbb{R}$ volledig (complete) is, dat wil zeggen de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is een Cauchyrij dan en slechts dan als $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is.
2. Beschouw de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, en de bijbehorende rij $s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ van partiële sommen
   (a) Wanneer heet de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent?
   (b) Definieer $C_N = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} s_k$ en de rij $(C_N)_{N=0}^{\infty}$ van Cesàro sommen van de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Bewijs dat als de reeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergent is met som $L \in \mathbb{R}$ dat dan ook $\lim_{N\to\infty} C_N = L$.
   (c) Laat zien dat het omgekeerde van de uitspraak in (c) niet waar is.
3. (a) Wanneer heet een functie $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ continu in een punt x_0?
   (b) Formuleer de tussenwaardestelling (Intermediate value theorem)
   (c) Veronderstel dat $a < b$ en $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is. Bewijs dat er $m \in \mathbb{R}$ en $M \in \mathbb{R}$ bestaan met $f([a,b]) = [m, M]$.

ZOZ

4. Zij $f\colon X \to Y$, $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$, een bijectie.
   (a) Wanneer heet f differentieerbaar in $x_0 \in X$?
   (b) Formuleer de inverse functiestelling.
   (c) Geef een bewijs van uw uitspraak bij (b).

5. Zij $I \subset \mathbb{R}$ een begrensd interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$.
   (a) Wanneer heet $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann integreerbaar?
   (b) Bewijs dat een uniform continue functie $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann integreerbaar is.
   (c) Veronderstel $I = [a, b]$ $(a < b)$ en $f\colon I \to \mathbb{R}$ is continu, bewijs dat er een $c \in (a, b)$ bestaat met
   $$\int_I f \;=\; f(c)\,(b - a)$$
   (d) Veronderstel $I = [a, b]$ $(a < b)$ en $f\colon I \to \mathbb{R}$ is continu, en bovendien dat $\int_I fg = 0$ voor iedere continue functie $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. (Het is bekend dat het produkt weer continu is, en dus Riemann-integreerbaar.) Bewijs dat $f(x) = 0$ voor iedere $x \in I$. (*Hint.* Bewijs eerst dat voor een niet-negatieve continue f met $\int_I f = 0$ dat dan geldt $f(x) = 0$ voor iedere $x \in I$.)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	9	9	9	8	10	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $t = 0.9T + 0.1P$, waarbij P uw cijfer voor de presentatie is. In het uiteindelijke eindcijfer worden de resultaten van het huiswerk en/of tussentoets verwerkt op de wijze zoals beschreven in de studiewijzer. De resultaten voor het huiswerk en de tussentoets kunnen alleen in uw voordeel werken.