Radboud Universiteit Nijmegen

Tentamen Analyse 1 WP001B
26 augustus 2010, 14.00–17.00, Examenzaal

Het gebruik van een rekenmachine en/of telefoon is niet toegestaan. U mag geen gebruik maken van het boek *Analysis I*.
Geef precieze argumenten en antwoorden. Maak uw redenering zo helder mogelijk.

---

1. Beschouw de rij $(a_n)_{n=0}^\infty$ van reële getallen.
   (a) Wanneer heet $L \in \mathbb{R}$ een limietpunt van de rij $(a_n)_{n=0}^\infty$?
   (b) Wat is de definitie van de limiet superior (ook wel *limes superior* genoemd) $\limsup_{n\to\infty} a_n$ van de rij $(a_n)_{n=0}^\infty$?
   (c) Bewijs de volgende uitspraak. Als $L = \limsup_{n\to\infty} a_n$ bevat is in $\mathbb{R}$, dan is L een limietpunt van de rij $(a_n)_{n=0}^\infty$.

2. (a) Bewijs de volgende uitspraak: als $(a_n)_{n=0}^\infty$ een stijgende rij is en $(b_n)_{n=0}^\infty$ een dalende rij is met de eigenschappen $a_n \leq b_n$ en voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ met $b_n - a_n \leq \varepsilon$, dan bestaat er precies één getal $T \in \mathbb{R}$ met $a_n \leq T$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $T \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Zij $(x_n)_{n=0}^\infty$ een rij met $x_n \in [a, b]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Stel $a_0 = a$, $b_0 = b$. Omdat de rij $(x_n)_{n=0}^\infty$ oneindig veel punten heeft (we tellen eventueel samenvallende punten in de rij net zo vaak als ze voorkomen in de rij), heeft de rij $(x_n)_{n=0}^\infty$ oneindig veel punten in het interval $[a, \frac{1}{2}(a+b)]$ of in het interval $[\frac{1}{2}(a+b), b]$. Stel $a_1 = a$, $b_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ in het eerste geval en $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, $b_1 = b$ in het tweede geval (en als beide waar zijn, dan kiezen we één van twee). Bewijs dat er rijen $(a_n)_{n=0}^\infty$ en $(b_n)_{n=0}^\infty$ bestaan die voldoen aan de voorwaarden uit (a) en zodanig dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ er oneindig veel elementen van de rij $(x_n)_{n=0}^\infty$ bevat zijn in het interval $[a_n, b_n]$.
   (c) Formuleer de Stelling van Bolzano-Weierstrass.
   (d) Bewijs de stelling van Bolzano-Weierstrass met behulp van het resultaat van (b) (en (a)).

ZOZ

3. De Tussenwaardestelling: Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie en zij c tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan bestaat er een $d \in [a,b]$ met $f(d) = c$.
   (a) Bewijs de Tussenwaardestelling.
   (b) Geef een voorbeeld van een niet-continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ waarvoor wel geldt dat voor elke c tussen $f(a)$ en $f(b)$, er een $d \in [a,b]$ met $f(d) = c$.
   (c) Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie met de eigenschap dat voor elke $c \in [f(a), f(b)]$ er een $d \in [a,b]$ bestaat met $f(c) = d$. Bewijs dat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continu is. (f is ook continu op $[a,b]$, maar u hoeft het enkel voor het inwendige te bewijzen.)

4. (a) Wanneer heet $f\colon X \to \mathbb{R}$ differentieerbaar in het punt $x_0 \in X$?
   (b) Bewijs dat als f differentieerbaar is in x_0, dan is f continu in x_0.
   (c) Formuleer en bewijs de productregel voor de afgeleide.

5. Stel $I = [a,b]$, en zij $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie.
   (a) Wanneer heet $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integreerbaar met betrekking tot α?
   (b) Veronderstel dat $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integreerbaar met betrekking tot α en dat $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is en dat α' Riemann integreerbaar op I. Bewijs dat $f\alpha'$ Riemann integreerbaar is op I en dat
   $$\int_I f\,d\alpha = \int_I f\alpha'$$
   U mag aannemen dat het resultaat waar is voor een stuksgewijs constante functie f (hetgeen volgt uit het tweede deel van de Hoofdstelling van de Integraalrekening).
   (c) Neem $a = -1$, $b = 1$ en definieer $\alpha(x) = -1$ voor $x < 0$, $\alpha(0) = 0$, en $\alpha(x) = 1$ voor $x > 0$. Bewijs dat de begrensde functie $f\colon I \to \mathbb{R}$ Riemann-Stieltjes integreerbaar is met betrekking tot α dan en slechts dan als f continu is in 0. (*Hint.* Ga na wat de p.c. $\int_I g\,d\alpha$ is voor een stuksgewijs constante functie $g\colon I \to \mathbb{R}$, en vergelijk boven- en onderintegralen met elkaar.)

Normering							
Opgave	1	2	3	4	5	Gratis	Totaal
Punten	7	10	10	8	10	5	50

Het onafgeronde tentamencijfer T is het totaal aantal behaalde punten gedeeld door 5.
Het eindcijfer is de gebruikelijke afronding van $t = 0.9T + 0.1P$, waarbij P uw cijfer voor de presentatie is. In het uiteindelijke eindcijfer worden de resultaten van het huiswerk en/of tussentoets verwerkt op de wijze zoals beschreven in de studiewijzer. De resultaten voor het huiswerk en de tussentoets kunnen alleen in uw voordeel werken.

Summiere uitwerkingen en hints

Opgave 1

(a) (2 punten) Definition 6.4.1

(b) (2 punten) Definition 6.4.6

(c) (3 punten) Proposition 6.4.12(e)

Opgave 2

(a) (4 punten) De rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is stijgend en van boven begrensd, nl door b_0 (of een willekeurig ander element uit de rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$). Dus is de rij $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent en wel $\lim_{n\to\infty} a_n = T$ met $T = \sup_n a_n$. Dan geldt $a_n \leq T$ voor alle $n \in \mathbb{R}$, en T is het kleinste getal dat hier aan voldoet.

Op dezelfde manier is de dalende rij $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ van onderen begrensd door a_0, en dus is $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent en wel $\lim_{n\to\infty} b_n = S$ met $S = \inf_n a_n$. Dan geldt $b_n \geq S$ voor alle $n \in \mathbb{R}$, en S is het grootste getal dat hieraan voldoet.

Dus we moeten nog aantonen dat $S = T$. Merk op dat de rij $(b_n - a_n)_{n=0}^{\infty}$ niet-negatief is want $b_n \geq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Bovendien geldt $b_{n+1} - a_{n+1} \leq b_n - a_{n+1} \leq b_n - a_n$ omdat achtereenvolgens $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ dalend is en $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ stijgend is. Dan volgt $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$, want kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, dan bestaat er $N \in \mathbb{N}$ met $0 \leq b_N - a_N \leq \varepsilon$ en omdat $(b_n - a_n)_{n=0}^{\infty}$ niet-negatief en dalend is volgt dat $0 \leq b_n - a_n \leq \varepsilon$ voor alle $n \geq N$.

En dan

$$S = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n + a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n = T$$

omdat alle rijen convergent zijn kunnen we Theorem 6.1.19 gebruiken.

(b) (1 punten) Met inductie op N, waarbij het geval $N = 0$, $N = 1$ al in de opgave is gedaan. Veronderstel dat $(a_n)_{n=0}^{N}$ een stijgende rij , $(b_n)_{n=0}^{N}$ een dalende rij is zodanig dat de rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ telkenmale oneindig veel elementen heeft in het interval $[a_i, b_i]$ voor elke $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$ en zodanig dat $b_i - a_i = (b - a)/2^i$. Door dezelfde procedure te volgen, volgt dat het ook waar is voor $N + 1$.

(c) (2 punten) Theorem 6.6.8.

(d) (3 punten) Bepaal de deelrij als volgt: $x_{n_0} = x_0$ en bepaal x_{n_1} door middel van $n_1 = \min\{j > n_0 \mid x_j \in [a_1, b_1]\}$ en meer algemeen door $n_i = \min\{j > n_{i-1} \mid x_j \in [a_i, b_i]\}$. Dan is $(x_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ een deelrij van $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en bovendien geldt $a_i \leq x_{n_i} \leq b_i$. Vanwege (a) en de squeeze theorem Corollary 6.4.14 volgt dat $(x_{n_i})_{i=0}^{\infty}$ convergent is (en wel naar T uit (a)).

Opgave 3

(a) (4 punten) Zie bewijs Theorem 9.7.1.

(b) (2 punten) Neem bv $I = [0, 2]$, $f(x) = x$ voor $x \in [0, 1]$ en $f(x) = \frac{1}{2}$ voor $x \in (1, 2]$.

(c) (4 punten) Kies $d \in (a, b)$, en kies $\varepsilon > 0$ willekeurig. Vanwege de tussenwaardeeigenschap kunnen we $d_1 < d < d_2$ vinden met $d_1, d_2 \in [a, b]$ zodanig dat

$$f(d) - \varepsilon < f(d_1) \leq f(d) \leq f(d_2) < f(d) + \varepsilon$$

(waarbij $d_1 = a$ als $f(d) - \varepsilon < f(a)$ en $d_2 = b$ als $f(d) + \varepsilon > f(b)$) Kies nu $\delta = \min(d - d_1, d_2 - d)$, dan geldt, vanwege de monotonie dat als $|x - d| < \delta$, $x \in [a, b]$, dat

$$f(d) - \varepsilon < f(d_1) \leq f(x) \leq f(d_2) < f(d) + \varepsilon$$

en dus $|f(d) - f(x)| \leq \varepsilon$. Dus f is continu in $d \in (a, b)$.

Opgave 4

(a) (2 punten) Definition 10.1.1 (x_0 limiet punt van X)

(b) (3 punten) Proposition 10.1.10

(c) (3 punten) Theorem 10.1.13(d)

Opgave 5

(a) (2 punten) p.336

(b) (4 punten) Corollary 11.10.3

(c) (4 punten) Stel g is stuksgewijs continu ten opzichte van een partitie P. Er zijn 2 mogelijkheden; óf (1) 0 zit in het inwendige van een interval I uit de partitie P óf (2) 0 is een eindpunt van een interval I_l (we nemen niet noodzakelijkerwijs aan dat het eind- of begin punt bevat is in het interval; dus (a, b) heeft b als eindpunt) en het beginpunt van een ander interval I_r met $I_l \in P$ en $I_r \in P$. We veronderstellen dat I_l en I_r een niet-leeg inwendige hebben, want zo niet dan is I_l of I_r gelijk aan $\{0\} \in P$, en deze heeft geen bijdrage in de stuksgewijs constante integraal, want $\alpha[\{0\}] = \alpha(0) - \alpha(0) = 0$. In geval (1) krijgen we

$$\text{p.c.} \int_I g \, d\alpha \;=\; \alpha[I]\, c_I \;=\; 2\, c_I, \qquad g = \sum_{I \in P} c_I \, \chi_I$$

en in geval (2)

$$\text{p.c.} \int_I g \, d\alpha \;=\; \alpha[I_l]\, c_{I_l} + \alpha[I_r]\, c_{I_r} \;=\; c_{I_l} + c_{I_r}, \qquad g = \sum_{I \in P} c_I \, \chi_I$$

Kortom, door naar de gemeenschappelijke verfijning van P en $P' = \{[-1,0), \{0\}, (0,1]\}$ te gaan kunnen we veronderstellen dat we altijd in geval (2) zijn met $I_l = [(a,0)$, $I_r = (0,b)]$ voor $a < 0 < b$ (met I_l links open of gesloten en I_r rechts open of gesloten).

Veronderstel eerst dat f continu is in 0, dan voor $g^+ \geq f$, $g^- \leq f$ met g^+ en g^- stuksgewijs constant met waarden met waarden g_l^+, g_l^- op het interval I_l, g_r^+, g_r^- op het interval I_r. Kies $\varepsilon > 0$ willekeurig, en, omdat f continu is in 0, daarbij een $\delta > 0$ zodanig dat $|x| \leq \delta$ impliceert $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$, ofwel $f(0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon$. Kies nu een partitie P met $[-\delta, 0)$, $\{0\}$, $(0, \delta]$ in P, en kies daarbij g^+ en g^- met $g_l^+ = f(0) + \varepsilon$, $g_r^+ = f(0) + \varepsilon$, $g_l^- = f(0) - \varepsilon$, $g_r^- = f(0) - \varepsilon$ en verder willekeurig met $g^+ \geq f$ en $g^0 - \leq f$. Dan geldt

$$0 \leq \overline{\int_I} f d\alpha - \underline{\int_I} f d\alpha \leq \text{p.c.} \int_I g^+ \, d\alpha - \text{p.c.} \int_I g^- \, d\alpha = (g_l^+ + g_r^+) - (g_l^- + g_r^-) = 4\varepsilon.$$

Omgekeerd, als f niet continu is, dan bestaat er $\varepsilon_0 > 0$ zodanig dat voor iedere $\delta > 0$ er een $x_\delta \in [-\delta, \delta]$ bestaat met $|f(x_\delta) - f(0)| > \varepsilon_0$, ofwel $f(x_\delta) > f(0) + \varepsilon_0$ of $f(x_\delta) < f(0) - \varepsilon_0$. Om in te zien dat f niet Riemann-Stieltjes integreerbaar is mbt α is het voldoende in te zien dat voor elke p.c. $g^+ \geq f$, en p.c. $g^- \leq f$

$$\text{p.c.} \int_I g^+ \, d\alpha - \text{p.c.} \int_I g^- \, d\alpha \geq \varepsilon_0.$$

Dus kies g^+ en g^- willekeurig, dan, door over te gaan op een gemeenschappelijke verfijning, zijn ze p.c. tov dezelfde partitie P die de elementen $I_l = [(a,0)$ en $I_r = (0,b)]$ bevat. Minstens één van deze twee intervallen bevat een x_δ (neem $\delta = \min(-a, b)$), zeg in I_l dan volgt $(g_l^+ - g_l^-) > \varepsilon_0$ en dus is

$$\text{p.c.} \int_I g^+ \, d\alpha - \text{p.c.} \int_I g^- \, d\alpha = (g_l^+ - g_l^-) + (g_r^+ - g_r^-) > \varepsilon_0$$

omdat $g_r^+ - g_r^- \geq 0$. Idem als $x_\delta \in I_r$.