dr. M.L.A. van Pruijssen — Nijmegen, 15 januari 2020

Calculus A (NWI-WP025) — **Tentamen**

Naam: ____________________ Studentnummer: ____________________

- Schrijf **op ieder** vel uw naam en studentnummer. **Lever ook dit vel in!**
- Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan.
- Geef precieze argumenten en antwoorden.
- Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn.
- De opgaven die gemarkeerd zijn met een * zijn samen 30 punten waard. Het totaal aantal punten dat behaald is voor deze opgaven zal worden vervangen door de helft van het aantal punten dat behaald is voor de deeltoets (waarvoor 60 punten konden worden behaald) als dit een voordeel oplevert.

Question:	1*	2*	3*	4	5	6	7	8	9	Total
Points:	12	14	4	6	10	12	10	12	10	90
Score:										

1. (12 punten) (*-opgave). Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{9+x^2}}$ met domein $\mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de afgeleide van f.

   (b) Bepaal het bereik van f.

   (c) Beredeneer dat f inverteerbaar is zonder de inverse uit te rekenen.

   (d) Bepaal het domein van f^{-1}.

   (e) Laat zien dat $f(4) = \frac{8}{5}$ en bereken de afgeleide van f^{-1} in het punt $\frac{8}{5}$.

Solution: Variatie 1415 7-1-15.

(a)

$$f'(x) = \frac{(9+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 - 2x \cdot \frac{1}{2}(9+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{9+x^2} = \frac{18}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(b)

- f is overal differentieerbaar dus zijn er geen singuliere punten.
- Omdat $f'(x) > 0$ is f stijgend moeten we de limieten van $f(x)$ voor $x \to \pm\infty$ uitrekenen:
- $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} = -2, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} = 2.$$
  Daarmee is $B(f) = (-2, 2)$.

(c) Omdat $f'(x) > 0$ is f injectief, en daarmee bijectief op haar beeld, daarmee is ze inverteerbaar.

(d) Het domein van f^{-1} is het bereik van f, dus $D(f^{-1}) = B(f) = (-2, 2)$.

(e)

- $f(4) = \frac{8}{\sqrt{9+16}} = \frac{8}{5}$.
- Er geldt $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.
- Daarmee is $(f^{-1})'(\frac{8}{5}) = 1/f'(4) = 125/18$.

2. (14 punten) (*-opgave). Beschouw de functie $f(x) = \dfrac{x \cdot e^x}{1-x}$ met domein $(-\infty, 1)$.

(a) Bepaal de nulpunten van f en geef aan waar f positief/negatief is.

(b) Heeft f (horizontale/verticale/scheve) asymptoten? Zo ja, bepaal deze.

(c) Bepaal de afgeleide van f.

(d) Bepaal de extreme waarden van f (maxima/minima, lokaal/globaal).

Solution: (a)

- $f(x) = 0$ als $xe^x = 0$ omdat $1/(1-x) > 0$ op het domein.
- Dus $f(x) = 0$ precies als $x = 0$.
- Op het interval $(-\infty, 0)$ is $f(x) < 0$, op $(0, 1)$ is $f(x) > 0$.

(b)

- Er geldt $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ dus bij $x = 1$ is een verticale asymptoot.
- Verder $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$. Dus $y = 0$ is horizontale asymptoot.
- Er zijn geen andere asymptoten, want dat zou in het gedrag voor $x \to -\infty$ moeten zitten, maar dat hebben we al besproken.

(c) $f'(x) = -\frac{e^x(x^2-x-1)}{(1-x)^2}$.

(d)

- Er zijn geen singuliere punten en geen randpunten.
- De enige kandidaten zijn de kritische punten, i.e. oplossingen van $f'(x) = 0$.
- Dit geeft $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Omdat $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} > 1$, is alleen $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ een kandidaat.
- Omdat $f'(x)$ van teken wisselt in dit punt, van negatief naar positief, heeft f in dit punt een lokaal minimum.
- Het minimum is

$$f(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}) = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}$$
$$= \frac{6-2\sqrt{5}}{6} e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}} = (1 - \frac{2}{3}\sqrt{5}) e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

- Omdat f rechts van $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ dalend is en op $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, 1)$ stijgend, is het een globaal minimum.

3. (4 punten) (*-opgave). Evalueer $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2}dx$.

Solution:

- Substitueer $y = \arctan(x)$. Dan is $dy = \frac{1}{1+x^2}dx$.
- Daarmee is

$$\int_0^1 \frac{(\arctan(x))^2}{1+x^2}dx = \int_{\arctan(0)}^{\arctan(1)} y^2 dy = \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{192}.$$

4. (6 punten) Bepaal de limiet $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x^2}\right)$ met behulp van Taylorreeksen.

Solution:

- Eerst gelijknamig maken en tot een breuk omschrijven:

$$\frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2(\cos(x)-1)}{x^2(\cos(x)-1)} = \dots$$

- De Taylorreeks $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ invullen geeft

$$\dots = \frac{x^2 + 2(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots)}{-\frac{x^4}{2} + \cdots} = \frac{\frac{4}{4!} + \cdots}{-1 + \cdots}.$$

- Daarmee is

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)-1} + \frac{2}{x^2}\right) = -\frac{1}{6}.$$

5. (10 punten) Bepaal van de volgende rijen of ze convergent of divergent zijn. Indien convergent, geef dan ook de waarde van de limiet $\lim_{n\to\infty} a_n$ met

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \text{en} \quad a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 + 2}.$$

Solution: Variatie 16 juni 2016 opg1. De eerste was ook aanbevolen (9.1.27).

(a)

- Eerst een $n!$ tegen de staart van $(2n)!$ wegstrepen:

$$0 \le a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n!}{2n \cdot (2n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1}{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+2) \cdot (n+1)}.$$

- Wat overblijft is het product van factoren $\frac{n-k}{2n-k} \le \frac{1}{2}$.
- Daarmee is $0 \le a_n \le 2^{-n}$;
- omdat $2^{-n} \to 0$ for $n \to \infty$, is $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ wegens de insluitstelling.

(b)

- Vermenigvuldig a_n met

$$1 = \frac{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2}}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2}}$$

  wat toegestaan is omdat de noemer ongelijk is aan nul.

- Dan is

$$a_n = \frac{(n^2 - 2n) - (n^2 + 2)}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2}} = \frac{-2n - 2}{\sqrt{n^2 - 2n} + \sqrt{n^2 + 2}} = \frac{-2 - 2/n}{\sqrt{1 - 2/n} + \sqrt{1 + 2/n^2}}.$$

- Daarmee gaat $a_n \to -1$ als $n \to \infty$.

6. (12 punten) Beschouw de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}$.

(a) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks.

(b) Bepaal het convergentiegedrag in de randpunten $x = -R$ en $x = R$.

(c) Geef een expliciete uitdrukking voor de reeks op het interval $(-R, R)$. *Hint:* differentieer de machtreeks.

Solution: Variatie 16 juni 2016 opg6.

(a) Met het quotientenkenmerk volgt

$$\frac{\left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+2}}{n+2}\right|}{\left|\frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1}\right|} = \frac{3(n+1)|x|}{(n+2)} \to 3|x|$$

als $n \to \infty$. Dus er is convergentie bij $|x| < \frac{1}{3}$ en divergentie bij $|x| > \frac{1}{3}$. Daarmee is $R = \frac{1}{3}$.

(b)

- Als $x = -\frac{1}{3}$ dan is de reeks $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, en deze reeks is divergent (harmonische reeks).
- Is $x = \frac{1}{3}$, dan is de reeks $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, en deze reeks is voorwaardelijk convergent wegens het kenmerk voor alternerende reeksen: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$ en de absolute waarden van opvolgende termen worden steeds kleiner met limiet 0.

(c)

- De afgeleide van de reeks is $\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n$, wat gelijk is aan $1/(1+3x)$ voor $|3x| < 1$ (meetkundige reeks), waarvan sprake is op het interval $|x| < \frac{1}{3}$.
- Daarmee is de reeks gelijk aan een primitive van $1/(1+3x)$, te weten $\frac{1}{3}\ln(1+3x) + C$, waarvan alleen de constante nog bepaald moet worden.
- Door $x = 0$ te nemen vinden we $C = 0$ en daarmee

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}\ln(1+3x).$$

7. (a) (6 punten) Los de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2x^3y^2$ met beginvoorwaarde $y(0) = 1$ op.

   (b) (4 punten) Bepaal de algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} + y = e^x$.

Solution:

(a) De vergelijking is separabel, we krijgen dus

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = 2x^3.$$

Aan beide kanten integreren tegen x:

$$\int \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}dx = \int 2x^3 dx.$$

RHS geeft $\int \frac{1}{y^2}dy = -1/y + C_1$, LHS geeft $x^4/2 + C_2$. Daarmee is

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^4 + C}{2}$$

zodat

$$y = -\frac{2}{x^4 + C}.$$

Met $y(0) = 1$ geldt $-2/C = 1$ zodat $C = -2$.

(b) Er zijn tenminste 3 manieren:

1. Integrerende factor. Zet $\mu(x) = \int 1dx = x$ zodat e^x de integrerende factor is. De algemene oplossing is nu

$$y(x) = e^{-x}\int e^x \cdot e^x dx = e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x} + C) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}.$$

2. Variatie van constante: De oplossing van de homogene vergelijking is $y(x) = Ke^{-x}$ dus nemen we aan dat de algemene oplossing van het orginele probleem wordt gegeven door $y(x) = k(x)e^{-x}$. Voor $k(x)$ geldt $k'(x) = e^x \cdot e^x = e^{2x}$ zodat $k(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$. Daarmee is de algemene oplossing dus $y(x) = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$.

3. Homogeen probleem oplossen: $y = Ce^{-x}$. Dan een particuliere oplossing raden: Ke^x. Dit geeft $2Ke^x = e^x$, zodat $\frac{1}{2}e^x$ een particuliere oplossing is.

8. (12 punten) Beschouw de differentiaalvergelijking $(x^2+1)y'' + xy' - \lambda y = 0$.

(a) Stel dat $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing van de vergelijking is die ongelijk is aan nul. Bepaal de recurrente betrekkingen voor de coëfficienten a_n.

(b) Neem aan dat de zo gevonden oplossingen convergeren op $\mathbb{R}$. Laat zien dat er twee lineair onafhankelijke oplossingen bestaan door twee geschikte paren (a_0, a_1) te kiezen (zonder de overige coëfficienten uit te rekenen).

(c) Bestaat er een λ waarvoor de oplossingsruimte bestaat uit polynomen? Zo ja, geef dan aan voor welke λ en motiveer uw antwoord.

Solution: (a) Er geldt:

$$(x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n)x^n$$

en daarmee wordt de differentiaalvergelijking

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - \lambda a_n)x^n = 0.$$

Omdat de coëfficiënten nul moeten zijn volgt

$$a_{n+2} = -\frac{n^2-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n,$$

de gevraagde recurrente betrekking.

(b) Er zijn natuurlijk vele oplossingen mogelijk. Hier is de oplossing die het meest voor de hand ligt.

- Laat $y_0(x)$ de oplossing zijn met $a_0 = 1$ en $a_1 = 0$, y_1 die met $a_0 = 0, a_1 = 1$.
- Dan zijn y_0 en y_1 machtreeksen met alleen even en oneven termen respectievelijk.
- Aan de tonen: deze zijn lineair onafhankelijk: Stel $by_0 + cy_1 = 0$. Dan geldt dit ihb voor $x = 0$, zodat $b = 0$. Omdat y_1 niet de nulfunctie is, is er een x_0 met $y_1(x_0) \neq 0$, zodat ook $c = 0$.

(c) Als de oplossingsruimte uit polynomen bestaat, moet ze worden voortgebracht door polynomen. Dat betekent dat a_{2n+2} en $a_{2m+3} = 0$ voor zekere m, n. Maar dat gaat niet tegelijkertijd.

9. (10 punten) Juist of onjuist? (Zonder motivatie).

   (a) Als f een functie is op het gesloten interval $[a, b]$ en s is een getal tussen $f(a)$ en $f(b)$, dan is er een $c \in (a, b)$ waarvoor $f(c) = s$. ◯ juist $\surd$ **onjuist**

   (b) Als $\{a_n\}$ divergent is en $\{b_n\}$ is begrensd, dan is $\{a_n b_n\}$ ook divergent. ◯ juist $\surd$ **onjuist**

   (c) ~~De stelling van Abel zegt: Een reeks is continu op het hele interval waarop ze convergeert.~~ ◯ juist ◯ onjuist

   (d) De differentiaalvorm $(1 - y\sin(x))dx + (\cos(x) + x)dy$ is exact. ◯ juist $\surd$ **onjuist**

   (e) Zij $p(z)$ een polynoom met $p(i) = 0$. Dan is ook $p(-i) = 0$. ◯ juist $\surd$ **onjuist**

Solution: (a) Onjuist, tegenvoorbeeld: $f(0) = 0$ en $f(x) = 1$ op $(0, 1]$; f neemt geen enkele waarde aan in $(0, 1)$.

(b) Onjuist, als $b_n = 0$ dan is $a_n b_n = 0$ niet divergent.

(c) Geschrapt wegens ambiguiteit. Ik had moeten schrijven: *machtreeks*. Door alleen *reeks* te schrijven is (terecht) verwarring ontstaan. Iedereen krijgt 2 punten.

(d) Onjuist. Deze vorm is niet gesloten en kan dus niet exact zijn.

(e) Onjuist, neem bijvoorbeeld het polynoom $p(z) = z - i$.

De antwoorden staan vanavond op brightspace. **Einde**