dr. M.L.A. van Pruijssen | Nijmegen, 1 november 2019

Calculus A (NWI-WP025) | **Deeltoets**

- Schrijf **op ieder** vel uw naam en studentnummer.
- Het gebruik van een rekenmachine/GR, telefoon, boek, aantekeningen e.d. is niet toegestaan.
- Geef precieze argumenten en antwoorden.
- Zorg dat uw redeneringen en schrijfstijl helder en beknopt zijn.

---

1. (10 punten) (a) Zij $z = -2+3i$ en $w = 1-2i$. Bereken het rele en imaginaire deel van $\overline{w}/z$.

   (b) Zij $p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 4z + 13$. Ga na dat $p(i) = 0$ en bepaal vervolgens alle andere nulpunten van p.

Solution: (a)
Er geldt $\overline{w} = 1+2i$, waarmee

$$\frac{\overline{w}}{z} = \frac{1+2i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i} = \frac{-2+6-3i-4i}{13} = \frac{1}{13}(4-7i)$$

Daarmee is het rele deel $\frac{4}{13}$ en het imaginaire deel $\frac{-7}{13}$.
(b) Er geldt $p(i) = 1 + 4i - 14 - 4i + 13 = 0$ en de coefficienten van p zijn reel. Daarmee is $p(-i) = 0$ en dus deelt z^2+1 het polynoom $p(z)$, wegens de hoofdstelling van de algebra. Met een staartdeling of anderszins vinden we

$$p(z) = (z^2+1)(z^2-4z+13).$$

De oplossingen van $z^2 - 4z + 13 = 0$ krijgen we door het kwadraat af te splitsen:

$$z^2 - 4z + 13 = (z-2)^2 - 4 + 13 = 0 \Longleftrightarrow (z-2)^2 = -9,$$

zodat $z = 2 \pm 3i$. Daarmee worden de nulpunten van $p(z)$ gegeven door $i, -i, 2+3i, 2-3i$.

2. (5 punten) Bereken de limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3}.$$

Solution: Hier zijn tenminste twee oplossingen. De eerste is het herhaald toepassen van de regel van l'Hpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Alternatief schrijven we $\sin(x)-x=-\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)$. Er kan een factor x^3 buiten de haakjes worden gebracht en samen met de rekenregels voor het symbool $\mathcal{O}$ levert dit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}+\mathcal{O}(x^2)}{1}=-\frac{1}{6}.$$

3. (14 punten) Definieer de functie $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ door

$$f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}.$$

(a) Bepaal de afgeleide van f en laat zien dat de afgeleide overal positief is.

(b) Bepaal het bereik van f.

(c) Laat zien dat f inverteerbaar is en bepaal de inverse van f inclusief het domein van f^{-1}.

Solution: (a) $f'(x)=\ln(2)2^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^{-2}$, het product van positieve getallen voor $x\neq 1$, dus zelf positief.

(b) De afgeleide is positief op $(-\infty,1)$, dus f is stijgend. We rekenen dus de limieten uit van $f(x)$ als x naar $-\infty$ of 1 gaat:

$$\lim_{x\to-\infty}2^{\frac{1}{1-x}}=1,\quad \lim_{x\to 1-}2^{\frac{1}{1-x}}=\infty.$$

Daarmee is het bereik $R(f)=(1,\infty)$.

(c) Omdat f stijgend is, is ze injectief en daarmee is ze inverteerbaar. Het domein van f^{-1} is het bereik van f: $D(f^{-1})=R(f)=(1,\infty)$. Om de inverse te vinden zetten we $f(x)=y$ en drukken we x uit als functie van y:

$$y=2^{1/(1-x)}\iff \ln(y)=\ln(2)/(1-x)\iff x=1-\ln(2)/\ln(y).$$

Daarmee is $f^{-1}(x)=1-\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$.

4. (8 punten) De lemniscaat van Bernouili[1] bestaat uit de punten (x, y) waarvoor geldt:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 + y^2).$$

Gegeven is dat rond het punt $(1, 1)$ de lemniscaat lokaal de grafiek van y als functie van x is. Bepaal de raaklijn aan de lemniscaat in $(1, 1)$.

Solution: Het punt $(1, 1)$ ligt (inderdaad) op de lemniscaat, want $2^2 = 2 \cdot 2$. Het is dus voldoende om de afgeleide van de impliciete functie y te vinden. Dit doen we door beide kanten naar x te differentieren:

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 2(2x + 2yy').$$

In het punt $(1, 1)$ levert dit

$$2(1^2 + 1^2)(2 + 2y'(1)) = 2(2 + 2y'(1)),$$

zodat $8 + 8y'(1) = 4 + 4y'(1)$, oftewel $y'(1) = -1$. De vergelijking van de raaklijn aan de lemniscaat in het punt $(1, 1)$ wordt daarmee

$$y - 1 = -(x - 1) \Longleftrightarrow y = 2 - x.$$

5. (10 punten) Bereken de bepaalde en de onbepaalde integraal:

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin(x) dx, \qquad \int \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} dx.$$

Solution: De bepaalde integraal was de aanbevolen opgave 6.1.29 uit het boek. Laten we de gevraagde integraal I noemen. Dan vinden we met twee keer partieel integreren:

$$\begin{aligned} I &= [-e^{-x} \sin(x)]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x} \cos(x) dx \\ &= 0 + [-e^{-x} \cos(x)]_0^\pi - I, \end{aligned}$$

en daarmee is $I = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

[1]Helaas is er een typje in het tentamen geslopen: de lemniscaat van Bernoulli wordt gegeven door

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

De vergelijking uit de opgave beschrijft de vereniging van een cirkel met straal $\sqrt{2}$ rond de oorsprong en de oorsprong zelf.

De integrand van de onbepaalde integraal herschrijven we tot

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - (2x + 1)}{x^2 + 1} = 2x + 1 - \frac{2x + 1}{x^2 + 1}.$$

Rekenen we verder nog

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln |x^2 + 1| + C, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + C,$$

dan vinden we

$$\int \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + 1} dx = x^2 + x - \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + C,$$

waar de absoluutstrepen weggelaten kunnen worden omdat $x^2 + 1 > 0$.

6. (13 punten) Stel $f(x) = x^4 e^{-x}$ met domein $[-1, 5]$.
   (a) Bepaal de nulpunten van f en geef aan waar f positief/negatief is.
   (b) Bepaal de afgeleide van f.
   (c) Bepaal de extreme waarden (maxima/minima en lokaal/globaal) van f.

Solution: (a) $f(x) = 0$ precies als $x^4 = 0$, want $e^{-x} > 0$. Dat is precies als $x = 0$. Omdat bovendien $x^4 \geq 0$ is $f(x) > 0$ voor $x \in [-1, 0) \cup (0, 5]$.

(b) $f'(x) = (4x^3 - x^4)e^{-x}$.

(c) Er zijn geen singuliere punten, want f is overal differentieerbaar. De kritieke punten worden verkregen door $f'(x) = 0$ op te lossen; we vinden dat $x^3(4 - x) = 0$ oftewel $x = 0$ of $x = 4$. Samen met de randpunten zijn dit de kandidaten die de extreme waarden kunnen opleveren.

Op de intervallen $[-1, 0)$ en $(4, 5]$ is $f'(x) < 0$. Op $(0, 4)$ is $f'(x) > 0$. Verder is $f(-1) = e, f(0) = 0, f(4) = 256/e^4$ en $f(5) = 5^4/e^5$. Daarmee zijn $f(-1) = e$ en $f(4) = 256/e^4$ lokale maxima en $f(0) = 0$ en $f(5) = 5^4/e^5$ lokale minima. Omdat $0 < 5^4/e^5$ is $f(0) = 0$ een globaal minimum. Omdat geldt dat $256/e^4 > e$ (wegens $e^5 < 3^5 = 243 < 256$), is $f(4) = 256/e^4$ een globaal maximum.

Maximaal aantal punten is 60 **Einde**